10. Дуални простор

Већ на примеру репрезентовања унитарног простора $\mathbb{U}$ уз помоћ датог базиса и дефинисања скаларног производа у тој репрезентацији (**поглавље 2**, примери 2 и 4) било је јасно да је неопходно уопштити унарну операцију комплексног коњуговања, преводећи је са скупа комплексних бројева на скупове уређених $n-$торки, тј. са потребом да се скаларни производ запише као

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = v_1^\dagger v_2$$

где се на десној страни налазе матрице којима су представљени вектори $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$, од којих је прва још и адјунгована (транспонована и комплексно коњугована). Унарна операција адјунговања, као уопштење унарне операције комплексног коњуговања, била је такође уведена и на скупу $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ свих оператора у простору $\mathbb{U}$.

Максимално уопштавање унарне операције комплексног коњуговања постиже се придруживањем читавом простору њему дуалног простора.

10.1. Дуални простор векторског простора

Да би се векторском простору $\mathbb{V}^n$ могао придружити њему дуални простор $\mathbb{V}^{*n}$ потребно је сетити се појма *линеарног функционала*, који је према **дефиницији 4.3.** очигледно елемент $\mathbb{L}(\mathbb{V},\mathbb{F})$, будући да је поље $\mathbb{F}$ увек једнодимензионални векторски простор над самим собом. Наиме, ако $\mathbb{F}^n$ представља $n-$димензионални векторски простор, онда $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}^1$ представља једнодимензионални векторски простор.

У бесконачно-димензионалном случају био је уведен појам ограничености линеарног функционала (**дефиниција 5.4**).

Сада ће бити дефинисан дуални векторски простор у коначно-димензионалном случају, јер је тако једноставније, а не представља неко битно ограничење, пошто сви закључци важе и за бесконачно-димензионалан случај.

Дефиниција 10.1. Нека је $\mathbb{V}=\mathbb{V}^n(\mathrm{I}\ )$ линеарни векторски простор над пољем $\mathbb{F}$ као једнодимензионалним векторским простором над самим собом $\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}^1(\mathbb{I}\ )$. Векторски простор $\mathbb{V}^*=\mathbb{L}(\mathbb{V},\ \ )$, кога сачињавају линеарни функционали који преводе $\mathbb{V}$ у $\mathbb{F}$ јесте *дуални простор* простора $\mathbb{V}$.

Заиста, да би се линеарни функционал представио матрицом, мора се прво одабрати базис $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ у простору $\mathbb{V}=\mathbb{V}^n(\mathrm{I}\ )$ и базис у простору $\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}^1(\mathbb{I}\ )$, што ће због његове једнодимензионалности бити број 1. Потом се делује функционалом $|\phi\rangle$ (као оператором[1]) на дати базис вектора, чиме се добија скуп бројева $\{\phi(|v_1\rangle)\equiv\langle\phi|v_1\rangle,\ldots,\phi(|v_n\rangle)\equiv\langle\phi|v_n\rangle\}$. Њиховим развијањем по базису броја 1 из $\mathbb{F}$, они остају непромењени: $\phi(|v_i\rangle)=\phi(|v_i\rangle)|1\rangle$. Сада се, према већ усвојеном поступку, поменути скуп бројева, уместо у матрицу-колону (која би се природно јавила у овом развоју) слаже у матрицу-врсту

$$\left[\phi(|v_1\rangle)\equiv\langle\phi|v_1\rangle\quad\ldots\quad\phi(|v_n\rangle)\equiv\langle\phi|v_1\rangle\right]$$

којом се представља линеарни функционал (као оператор) у базису $\{|v_1\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ простора $\mathbb{V}=\mathbb{V}^n(\mathrm{I}\ )$, док се базис $\{|1\rangle\}$ изоставља јер је увек исти.

Закључак: вектори из дуалног простора $\mathbb{V}^*$ представљају се *матрицама-врстама* у базису простора $\mathbb{V}$.

Дуални простор $\left(\mathbb{V}^*\right)^*$ дуалног простора $\mathbb{V}^*$ једнак је полазном простору $\mathbb{V}$, будући да се ради о уопштењу операције комплексног коњуговања.

[1] Понекад се оператори дефинишу као пресликавања из једног линеарног векторског простора у други, те у том смислу функционал представља оператор (видети фусноту уз **дефиницију 7.1.** и коментар након **дефиниције 7.3**).

Нека вектор $|v\rangle \in \mathbb{V}$ буде фиксиран, и нека функционал $|\phi\rangle$ пролази кроз читав простор $\mathbb{V}^*$; тада је $\phi(|v\rangle) \equiv \langle\phi|v\rangle$ *линеарни функционал* у простору $\mathbb{V}^*$ јер сваком $|\phi\rangle \in \mathbb{V}^*$ придружује $\phi(|v\rangle) \equiv \langle\phi|v\rangle \in \mathbb{F}$ (придруживање је линеарно, јер се ради о линеарној функцији), док је то исто $|\phi\rangle$ вектор $\bar{v}(|\phi\rangle) = \phi(|v\rangle)$ у $\left(\mathbb{V}^*\right)^*$.

Пресликавање $|v\rangle \to |\bar{v}\rangle$, $|v\rangle \in \mathbb{V}$, $|\bar{v}\rangle \in \left(\mathbb{V}^*\right)^*$ јесте линеарна бијекција, те стога и изоморфизам. Такав изоморфизам, који *није дефинисан* повезивањем једног базиса у $\mathbb{V}$ и једног базиса у $\left(\mathbb{V}^*\right)^*$, јесте *инваријантни изоморфизам*. Простори повезани инваријантним изоморфизмом сматрају се једнаким: $\mathbb{V} = \left(\mathbb{V}^*\right)^*$. Дакле, $\mathbb{V}$ је простор свих функционала на $\mathbb{V}^*$, те су стога $\mathbb{V}$ и $\left(\mathbb{V}^*\right)^*$ симетрични.

Сад, произвољном базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ у простору $\mathbb{V}$ придружује се скуп линеарних функционала $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\}$ у $\mathbb{V}^*$ који су тако дефинисани да сваком вектору $|v\rangle \in \mathbb{V}$ придружују његову $i-$ту координату у базису $\{|v_i\rangle, i = \overline{1,n}\}$

$$\phi_i(|v\rangle) \equiv \langle\phi_i|v\rangle = \xi_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad |v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle . \tag{10.1}$$

С друге стране, сваки вектор базиса у $\mathbb{V}$ може се развити на следећи начин

$$|v_j\rangle = \sum_i \delta_{ij} |v_i\rangle$$

те израз (10.1) постаје

$$\phi_i(|v_j\rangle) \equiv \langle\phi_i|v_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n} . \tag{10.2}$$

Сада ће бити показано да је скуп $\{|\phi_1\rangle,\dots,|\phi_n\rangle\}$ базис у дуалном простору $\mathbb{V}^*$. Заиста, да би скуп $\{|\phi_1\rangle,\dots,|\phi_n\rangle\}$ био линеарно независан, израз $\sum_i \alpha_i\, \phi_i\left(|v\rangle\right)=0$ мора важити $\forall|v\rangle\in\mathbb{V}$, а то значи и за векторе из $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ који одмах дају

$$\sum_i \alpha_i\, \phi_i\left(|v_j\rangle\right)=\sum_i \alpha_i\, \delta_{ij}=0,\ \text{или}\ \ \alpha_i=0,\ j=\overline{1,n}.$$

Уз то, сваки вектор $\forall|\phi\rangle\in\mathbb{V}^*$ може се изразити као

$$\phi\left(|v\rangle\right)=\phi\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,|v_i\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,\phi\left(|v_i\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\phi\left(|v\rangle\right)\phi\left(|v_i\rangle\right),\ \ \forall|v\rangle\in\mathbb{V}$$

односно

$$|\phi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\phi\left(|v_i\rangle\right)|\phi_i\rangle\,. \tag{10.3}$$

Ово значи да се произвољни функционал може изразити као линеарна комбинација линеарних функционала из скупа $\{|\phi_1\rangle,\dots,|\phi_n\rangle\}$, а тај скуп је линеарно независан те као базис образује простор $\mathbb{V}^*$. Према формули (10.2), поменути базис је *биортогоналан* базису $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ из простора $\mathbb{V}$. Како су простори $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$ симетрични, исти израз (10.2) придружује ма ком базису у простору $\mathbb{V}^*$ биортогонални базис у простору $\mathbb{V}$, што значи да је биортогоналност бијекција између скупа свих базиса у $\mathbb{V}$ и скупа свих базиса у $\mathbb{V}^*$.[2]

На крају треба истаћи да је произвољни вектор из $\mathbb{V}^*$ представљен матрицом-врстом $\left[\phi\left(|v_1\rangle\right)\equiv\langle\phi|v_1\rangle\ \ \dots\ \ \phi\left(|v_n\rangle\right)\equiv\langle\phi|v_n\rangle\right]$ у базису $\{|v_1\rangle,\dots,|v_n\rangle\}\in\mathbb{V}$, а да је у

[2] На овом месту је згодно уочити да се конкретним реализацијама биортогоналних базиса могу сматрати *реципрочни базиси* у Еуклидовом простору.

биортогоналном базису $\{|\phi_1\rangle,\ldots,|\phi_n\rangle\}\in\mathbb{V}^*$ представљен транспонованом матрицом-колоном

$$\begin{bmatrix}\phi(|v_1\rangle)\equiv\langle\phi|v_1\rangle\\ \vdots\\ \phi(|v_n\rangle)\equiv\langle\phi|v_n\rangle\end{bmatrix}.$$

10.2. Дуални простор унитарног простора

Већ је било показано да у унитарним просторима важи Рис-Фрешеова теорема (**теорема 4.5**). Због тога у унитарним просторима постоји бијекција $\hat{D}$ између простора $\mathbb{U}$ и њему дуалног $\mathbb{U}^*$. Наиме, $\forall|v\rangle\in\mathbb{U}$ постоји јединствени функционал $|\phi\rangle\in\mathbb{U}^*$ повезан с њим формулом

$$\phi(|\tilde{v}\rangle)=\langle v|\tilde{v}\rangle\,,\quad \forall|\tilde{v}\rangle\in\mathbb{U}$$

а важи и обрнуто: за сваки линеарни функционал $|\phi\rangle\in\mathbb{U}^*$ постоји један и само један вектор $|v\rangle\in\mathbb{U}$

$$|v\rangle=\hat{I}\,|v\rangle=\left(\sum_i|v_i\rangle\langle v_i|\right)|v\rangle=\sum_i\langle v_i|v\rangle|v_i\rangle=\sum_i\phi^*(|v_i\rangle)|v_i\rangle \tag{10.4}$$

који репродукује тај функционал преко скаларног производа

$$\langle v|\tilde{v}\rangle=\sum_i\phi(|v_i\rangle)\langle v_i|\tilde{v}\rangle=\sum_i\phi(|v_i\rangle)\eta_i=\phi(|v\rangle)\,. \tag{10.5}$$

Бијекција $\hat{D}$ назива се *дуализмом* и антилинеарна је, што се види из формуле (10.4) која је последица ермитске симетрије скаларног производа, тј. антилинеарности скаларног производа по првом фактору.

Као што у случају линеарног векторског простора $\mathbb{V}$ и њему дуалног $\mathbb{V}^*$ постоје биортогонални базиси, тако и у случају унитарног простора $\mathbb{U}$ и њему дуалног $\mathbb{U}^*$ ортонормираном базису $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ldots,|\mathrm{e}_n\rangle\}\in\mathbb{U}$ одговара дуални ортонормирани базис $\{|\phi_1\rangle=\hat{D}|\mathrm{e}_1\rangle,\ldots,|\phi_n\rangle=\hat{D}|\mathrm{e}_n\rangle\}\in\mathbb{U}^*$ биортогоналан полазном; у том је случају лако видети да $\phi_i\left(|\tilde{v}\rangle\right)=\langle\mathrm{e}_i|\tilde{v}\rangle$ повлачи $\phi_i\left(|\mathrm{e}_j\rangle\right)=\langle\mathrm{e}_i|\mathrm{e}_j\rangle=\delta_{ij}$.

С друге стране, нека је вектор $|v\rangle\in\mathbb{U}$ представљен у ортонормираном базису $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ldots,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ матрицом-колоном

$$\xi=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix},$$

где је $\xi_i=\langle\mathrm{e}_i|v\rangle$ координата вектора $|v\rangle$ у датом базису; тада је дуални вектор

$$|\phi\rangle=\hat{D}|v\rangle=\hat{D}\left(\sum_i\xi_i|\mathrm{e}_i\rangle\right)=\sum_i\xi_i^*\hat{D}|\mathrm{e}_i\rangle,$$

где је $\{\hat{D}|\mathrm{e}_1\rangle,\ldots,\hat{D}|\mathrm{e}_n\rangle\}$ дуални базис, представљен матрицом-колоном

$$\xi^*=\begin{bmatrix}\xi_1^*\\ \vdots\\ \xi_n^*\end{bmatrix}.$$

Дакле, дуални вектори $|v\rangle$ и $\hat{D}|v\rangle$, репрезентовани су у сваком пару дуалних ортонормираних базиса матрицама-колонама које су комплексно коњуговане једна другој.

Сад, пошто су вектори у дуалном простору $\mathbb{U}^*$ уствари оператори (линеарни функционали) у простору $\mathbb{U}$, они се могу представити преко свог деловања на базис простора $\mathbb{U}$ *матрицама-врстама* (видети коментар на крају претходног потпоглавља) транспонованих од матрица-колона којима се поменути вектори представљају у биортогоналном базису простора $\mathbb{U}^*$.

У случају ортонормираног базиса у простору $\mathbb{U}$, њему дуалан и биортогоналан базис се поклапају (видети коментар у загради на крају трећег пасуса отпозади), па ће поменута репрезентациона матрица-врста дуалног вектора $|\phi\rangle = \hat{D}|v\rangle$ у таквом базису бити адјунгована (транспонована и комплексно коњугована) репрезентационој матрици-колони вектора $|v\rangle = \hat{D}^{-1}|\phi\rangle$ у истом базису простора $\mathbb{U}$.

Значи, вектори из дуалног простора $\mathbb{U}^*$ представљени су матрицама-врстама адјунгованим полазним матрицама-колонама којима се представљају полазни вектори из $\mathbb{U}$.

10.3. Диракова нотација

Кроз читав уџбеник коришћена је већ помињана Диракова нотација, по којој су вектори из полазног простора $\mathbb{U}$ означавани симболом $|\ \rangle$ са одговарајућим словом унутра, нпр. $|v\rangle$, а називани су *кет-векторима* (краће, *кетовима*). Вектори из њему дуалног простора $\mathbb{U}^*$ биће означавани симболом $\langle\ |$, нпр. $\langle v|$, и називани *бра-векторима* (краће, *браовима*).

Дирак је називе »бра« и »кет« извукао из енглеске речи »bracket« (заграда), избацивши средње слово »c« које као да одговара црти између два вектора у изразу за скаларни производ $\langle v_1|v_2\rangle$. Јасно је да се у датом ортонормираном базису кет $|v\rangle$ представља матрицом-колоном, а бра $\langle v|$ матрицом-врстом, адјунгованом матрици-колони којом је представљен њему дуални кет $|v\rangle$, те се може писати, као што је поменуто на почетку поглавља

$$\langle v_1|v_2\rangle = v_1^{\dagger} v_2 .$$

Ову општеприхваћену нотацију Дирак је увео 1930. године у својој чувеној књизи »Принципи квантне механике« [25].

Одмах се уочава да, ако је простор кетова коначно-димензионалан, њему дуални простор мора имати исти број димензија. Ако је простор кетова бесконачно-димензионалан, такав мора бити и дуални простор браова.

Бра-вектор $\langle v|$ је коњугован кет-вектору $|v\rangle$, зато се означавају истим словом.

На основу претходно реченог, из формуле

$$|v\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle + \alpha_2 |v_2\rangle$$

следи

$$\langle v| = \alpha_1 \langle v_1| + \alpha_2 \langle v_2| \,.$$

У бесконачно-димензионалном случају, уопштавајући појам линеарне комбинације увођењем интеграљења уместо сумирања, биће

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \alpha(\xi) |\xi\rangle \, d\xi \\ \langle v| &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \alpha(\xi) \langle \xi| \, d\xi \end{aligned} \,.$$

Треба запазити да ако је кет нулти вектор такав је и њему коњуговани бра.

Сада ће изнова бити дефинисан скаларни производ.

Дефиниција 10.2. Скаларни производ кета $|v_1\rangle$ и кета $|v_2\rangle$ јесте (у општем случају комплексан) број $\langle v_1|v_2\rangle$.

Директна последица поновне дефиниције скаларног производа јесте његова линеарност по $|v_1\rangle$ и антилинеарност по $|v_2\rangle$. Остале особине скаларног производа такође важе

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_2|v_1\rangle^* \text{ - ермитска симетрија}$$

и

$$\langle v|v\rangle \geq 0 \text{ - позитивна дефинитност.}$$

Дуализам $\hat{D}$ придружује сваком оператору $\hat{A} \in \mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{U})$ еквивалентни дуални оператор $\mathbb{L}(\mathbb{U}^*,\mathbb{L}^*) \ni \hat{A}^* = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}$. Наиме, како је дуални бра-вектор дат изразом $\langle v_1| = \hat{D}|v_1\rangle$ онда је кет-вектор једнак $|v_1\rangle = \hat{D}^{-1}\langle v_1|$. Одатле се добија да је други кет једнак $|v_2\rangle = \hat{A}|v_1\rangle = \hat{A}\hat{D}^{-1}\langle v_1|$, те је онда $\langle v_2| = \hat{D}|v_2\rangle = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}\langle v_1|$. Пресликавање $\langle v_1| \to \langle v_2|$ очигледно је линеарни оператор у простору $\mathbb{U}^*$ те се означава као $\hat{A}^*$, па је $\hat{A}^*\langle v| = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}\langle v|$ за произвољни бра $\langle v| \in \mathbb{U}^*$, што је приказано на **слици 10.1**.

$$
\begin{array}{ccc}
|v\rangle & \stackrel{\hat{D}}{\to} & \langle v| \\
\hat{A}\downarrow & \stackrel{\hat{D}^{-1}}{\to} & \downarrow\hat{A}^* \\
\hat{A}|v\rangle & \stackrel{\hat{D}}{\to} & \hat{A}^*\langle v|
\end{array}
$$

Слика 10.1.

Пресликавање $\hat{A}^* = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}$ дуализам је $\hat{D}$ простора $\mathbb{L}(\mathbb{U},\mathbb{L})$ и $\mathbb{L}(\mathbb{U}^*,\mathbb{L}^*)$, индукован дуализмом $\hat{D}$ простора $\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}^*$. То у потпуности одговара ставу из **теореме 7.1**, да ***сваки изоморфизам простора трансформацијом сличности индукује изоморфизам алгебри оператора који делују у тим просторима***.

Деловањем оператора $\hat{D}\hat{A} = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}$ на вектор $\langle v| = \hat{D}|v\rangle \in \mathbb{U}^*$ добија се

$$\hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}\langle v| = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}\hat{D}|v\rangle = \hat{D}\hat{A}|v\rangle \in \mathbb{U}^*.$$

Вектор $\hat{D}\hat{A}\langle v| = \hat{D}\left(\hat{A}|v\rangle\right)$ може се представити матрицом-врстом $\xi^\dagger \mathscr{A}^\dagger$ адјугованом матрици-колони $\mathscr{A}\xi$ која представља вектор $\hat{A}|v\rangle$ у истом базису простора $\mathbb{U}$. Пошто је кет $|v\rangle$ произвољан, то значи да је дуални оператор $\hat{A}^*$ представљен у сваком ортонормираном базису простора $\mathbb{U}$ матрицом (адјугованом матрици оператора $\hat{A}$ у истом базису) која делује здесна улево на матрицу-врсту. Како је реч о ортонормираним базисима, може се закључити и да се сам оператор $\hat{A}^*$ исто тако понаша, као и да је он једнак оператору $\hat{A}^{\dagger}$ који делује налево на бра-векторе као $\langle v|\hat{A}^{\dagger}$. Стога је

$$\left(\hat{A}|v\rangle\right)^{\dagger} = \langle v|\hat{A}^{\dagger}\,. \tag{10.8}$$

Ово је једно од главних правила при раду са квантно-механичким величинама.